Part I
点集拓扑

整理一下和Tychonoff定理相关的一些结论。

Theorem 1 (Tychonoff定理)**.**

在积拓扑下，紧致空间的任意积还是紧致空间.

Tychonoff定理的证明并不容易，需要用到Zorn引理或良序定理. 但是证明一些弱化的Tychonoff定理形式是比较容易的.

下面是课后作业中的一个命题，助教一开始给出了错误的证明.

Proposition 1.

$$\text{设}X_i\text{是一列紧致度量空间, 则}\prod_{i=1}^{+\infty}X_i\text{在积拓扑下紧致.}$$

证明. 令$\mathcal{A}=\{A_\alpha|\alpha\in J\}$是$\prod_{i=1}^{+\infty}X_i$在积拓扑下的一个开覆盖，记$A_0$是$\mathcal{A}$中的一个开集元素，不妨设

$$A_0=\prod_{i=0}^{n}U_i\cdot\prod_{j=n+1}^{+\infty}X_j$$

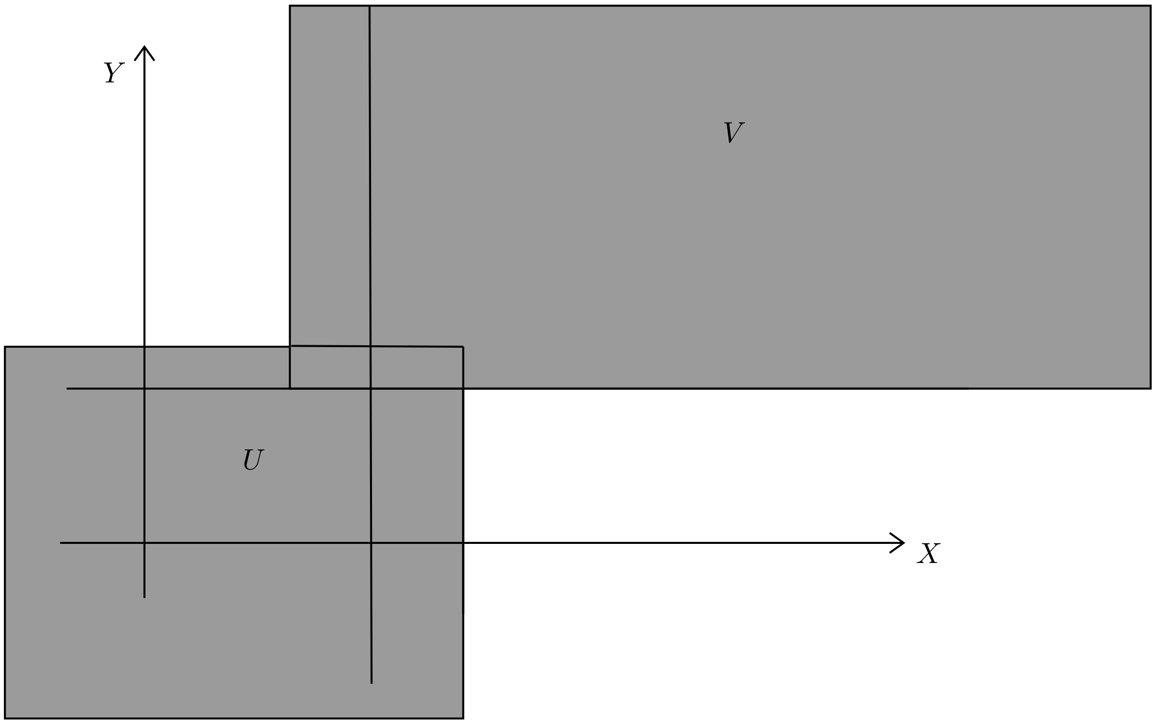
定义投影映射$\Pi_i:\prod_{j=1}^{+\infty}X_i\to X_i$, $\Pi_i(\mathcal{A})=\{\Pi_i(A_\alpha)\in\mathcal{A}\}$. 则$\Pi\mathcal{A}$构成了$X_1\cdots X_n$的一个开覆盖，由于$X_1\cdots X_n$紧致，可选取有限个$A_{\alpha_1}\cdots A_{\alpha_k}$

$$s.t.\quad\forall i=1\cdots n,\{\Pi_i(A_{\alpha_1})\cdots\Pi_i(A_{\alpha_k})\}\text{构成}X_i\text{的一个有限子覆盖.}$$

则$\{A_0,A_{\alpha_1},\cdots,A_{\alpha_k}\}\triangleq\mathcal{A}_1$是$\mathcal{A}$的一个有限子覆盖，从而$\prod_{i=1}^{+\infty}X_i$紧致. ∎?

显然，这个证明是错误的，它没有用到命题中“紧致度量空间”中的具有度量的性质.问题出在最后一步，使用选出来的在各个坐标轴上的投影都是一个有限开覆盖的$A_{\alpha_1}\cdots A_{\alpha_k}$构造的$\mathcal{A}_1$，这个子集族$\mathcal{A}_1$是否是一个积空间$\prod_{i=1}^{+\infty}X_i$的一个有限子覆盖，答案是否定的. 也就是说,一些开集在坐标轴上的投影分别构成了每个空间上的开覆盖，但这并不意味着他们能够构成积空间上的开覆盖.

下面是积空间$X\times Y$上的一个反例.开集U和V在空间X和Y上的投影分别构成了 X和Y的开覆盖，但是$U\times V$不是$X\times Y$的一个开覆盖.

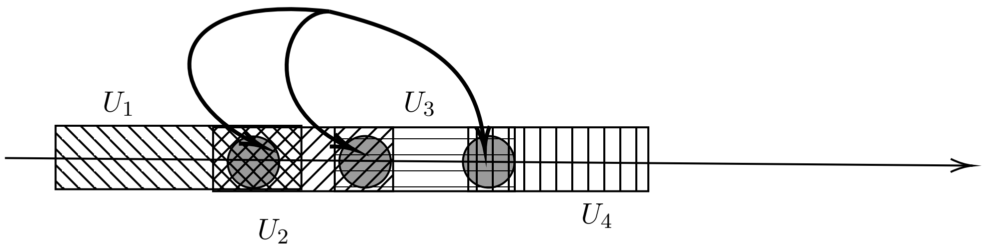


正确的做法应该是利用度量空间上的三种等价的紧致性.

Definition 1 (列紧性)**.** *若拓扑空间X中每个序列总有收敛子列, 则空间X是列紧的. 即对$\forall X$中序列(x_n),若$n_1 < n_2 < \cdots < n_i < \cdots$是单调增的正整数序列, 则总存在一个由$y_i = x_{ni}$定义的子列 (y_i)收敛.*

Lemma 1 (勒贝格数引理,Lebesgue number lemma)**.** *设$\mathcal{A}$是度量空间(X, d)上的一个开覆盖, 若X是紧致的, 则$\exists\delta > 0, s.t. X$的每一个直径小于$\delta$的子集都包含在$\mathcal{A}$中的某一个元素中.*

这个引理说明了, 对于紧致度量空间及其一个给定的开覆盖子集族, 任何直径足够小的开集总是被包含在这个开覆盖子集族中的某一个子集中的.



Theorem 2. *若空间X可被度量化, 则在空间X上, 紧致性、列紧性、极限点紧致三者等价.*

证明. 这里只证明列紧性⇒紧致性.

首先说明列紧性下勒贝格数引理也成立.

用反证法, 若不存在上述δ, 则$\forall n \in \mathbb{N}^*$总是$\exists x_n \in X,$, $s.t.\, B_{x_n}(\frac{1}{n})$ 为不包含在任何开覆盖子集族$\mathcal{A}$中的开集, 对序列$(x_n)_{n=1}^{+\infty}$用列紧性, 得到 $\exists$子列$(x_{n_i})_{i=1}^{+\infty}$收敛到某个$x \in X$.

$\because x \in$ 某个$\mathcal{A}$中子集$A_k \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 \quad s.t.\, B_x(\varepsilon) \subseteq A_k$

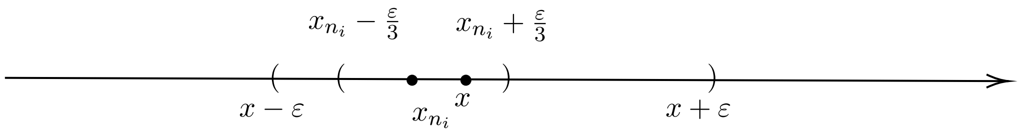
又 $\because \lim\limits_{i\to\infty} x_{n_i} = x$, 从而可以取充分大的$i_0$, $s.t.$ $\forall i > i_0$, $d(x_{n_i}, x) \le \dfrac{\varepsilon}{3}$

此时$B_{x_{n_i}}(\dfrac{\varepsilon}{3}) \subseteq B_x(\varepsilon) \subseteq A_k$,

为了保证$\dfrac{1}{n_i} < \dfrac{\varepsilon}{3}$, 取足够大的$i_1$, 使$\forall i > i_1$, 正整数序列$n_i > \dfrac{3}{\varepsilon}$恒成立,

$$\therefore \begin{cases} B_{x_{n_i}}(\dfrac{\varepsilon}{3}) \subseteq A_k, i > i_0 \\ B_{x_{n_i}}(\dfrac{1}{n_i}) \subseteq B_{x_{n_i}}(\dfrac{\varepsilon}{3}), i > i_1 \end{cases} \Rightarrow \text{当}i > max\{i_0, i_1\}\text{时,} B_{x_{n_i}}(\frac{1}{n_i}) \subseteq A_k$$

$\therefore B_{x_{n_i}}(\dfrac{1}{n_i}) \subseteq A_k$与$B_{x_n}(\dfrac{1}{n})$不包含在任何开覆盖子集族$\mathcal{A}$中的开集元素中矛盾.



综上, 列紧性下勒贝格数引理也成立.

下证$\forall \varepsilon > 0$, $\exists$由半径为ε的球构成的有限覆盖$\mathcal{B}$来覆盖列紧的空间X.

任取$x_1 \in X$, $B_{x_1}(\varepsilon) \nsubseteq X$, 再取$x_2 \in X \backslash B_{x_1} \Leftrightarrow d(x_1, x_2) > \varepsilon$ 每一步都取出和之前所有开球都不相交的一个开球$B_{x_{n+1}}(\varepsilon)$, 满足

$$x_{n+1} \in X \backslash \bigcup_{i=1}^{n} B_{x_i}(\varepsilon) \Leftrightarrow d(x_i, x_j) > \varepsilon, \forall i \neq j \le n+1$$

若在有限步中, $\bigcup_{i=1}^{n} B_{x_i}(\varepsilon)$ 已经覆盖了空间X, 命题得证.

若不能在有限个取开球的步骤中结束, 考虑这些取出来的开球球心x_i, 即存在一个无限序列 $\{x_i\}_{i=1}^{+\infty}$, $s.t.$ $\forall i \neq j \in \mathbb{N}^*, d(x_i, x_j) > \varepsilon$, 从而这个序列没有收敛子列（参考分析学中的做法）, 从而与列紧性矛盾!

自此, 我们得到了空间X中存在的一个由半径为ε的开球组成的有限覆盖.

最后, 要构造列紧空间X中开覆盖$\mathcal{A}$的一个有限子覆盖.

由勒贝格数引理, 得到$\exists \delta > 0$, $s.t.\, X$的每一个直径小于δ的子集都包含在$\mathcal{A}$中的某一个元素A_i中, 即满足$\forall x \in X, B_x(\delta) \subseteq A_i$, 然后取空间$X$的一个由半

径为ε的开球组成的有限覆盖 $\mathcal{B}=\{B_{x_i}(\delta)|x_i\in X,1\le i\le n\}$, 对每一个开球$B_{x_i}(\delta)$, 都有$B_{x_i}(\delta)\subseteq A_i$, $\forall 1\le i\le n$. 取出这个有限个A_i. 又因为$\mathcal{B}$是空间X的一个有限覆盖, 所以 $\mathcal{A}_0=\{A_i|1\le i\le n\}$为开覆盖$\mathcal{A}$的一个有限子覆盖, 从而空间$X$是紧致的. ∎

最后我们来着手利用列紧性证明原命题.

Proposition 2 (同 prop. 1)**.**

$$\text{设}X_i\text{是一列紧致度量空间, 则}\prod_{i=1}^{+\infty}X_i\text{在积拓扑下紧致.}$$

证明. 对于每一个紧致度量空间X_i, 他们都是列紧的(thm. 2).

首先, $\prod_{i=1}^{+\infty}X_i$在积拓扑下可度量化, 因此只要证明$\prod_{i=1}^{+\infty}X_i$列紧.

在$\prod_{i=1}^{+\infty}X_i$中任取序列

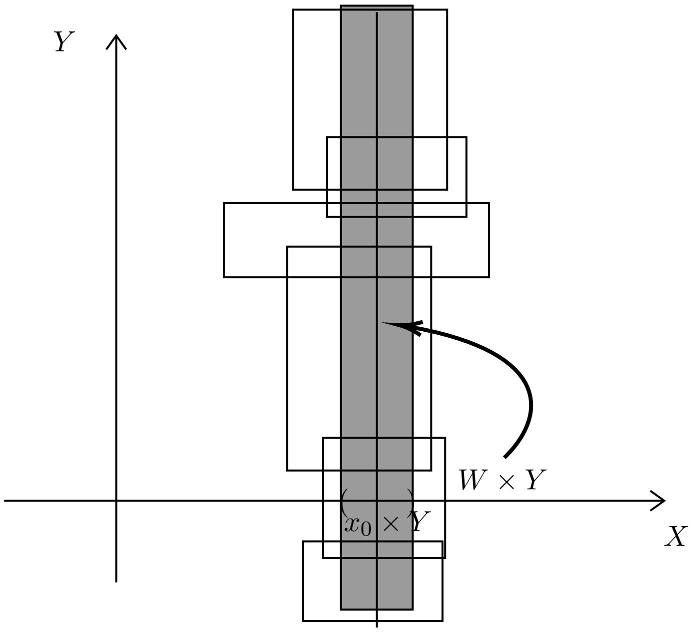
$$\{x^k\}_{k=1}^{+\infty}=\{(x_1^k,x_2^k,\cdots,x_n^k,\cdots)\}_{k=1}^{+\infty}\subset\prod_{i=1}^{+\infty}X_i$$

其中, $(x_1^k,x_2^k,\cdots,x_n^k,\cdots)$是$\prod_{i=1}^{+\infty}X_i$中的一个点.
step1: 由于X_1紧致, 则$\exists\{x^k\}_{k=1}^{+\infty}$的子列$\{x^{k_n}\}$ $s.t.$ $\{x_1^{k_n}\}$在X_1中收敛.
step2: 由于X_2紧致, 则$\exists$step1中取出$\{x^{k_n}\}$的子列$\{x^{k_{n_j}}\}$ $s.t.$ $\{x_2^{k_{n_j}}\}$在X_2中收敛.

依次在上一步得到的序列中取出满足在空间X_{i+1}中收敛的子列. 这里承认选择公理, 以保证在无数次选择中取出满足条件的序列的存在性. 假设这个序列为$\{x^{k_p}, s.t.\ \ \forall i\in\mathbb{N}^*, \{X_i^{k_p}\}$总在对应的空间中收敛到极限$x_i^*$. 记$(x_1^*,x_2^*,\cdots,x_i^*,\cdots)\triangleq x^*$, 在$x^*$处任取开邻域$\prod_{i=1}^{+\infty}U_i$, 在积拓扑下, 不妨设

$$\begin{cases}U_{i_1},\cdots,U_{i_n}\neq X_{i_k},\forall 1\le k\le n\\ X_i\quad\text{otherwise}\end{cases}$$

从而$\forall U_{i_s},\exists N_s$, 当$p>N_s$时, $x_{i_s}^{k_p}\in U_i$, 取$N=max_{1\le j\le n}\{N_s\}$, 则当$p>N$时, $x^{k_p}\in\prod_{i=1}^{+\infty}U_i$, 从而$\prod_{i=1}^{+\infty}X_i$列紧, 由于$\prod_{i=1}^{+\infty}X_i$在积拓扑下可度量化, 所以它是紧致的. ∎



管状引理, 待续