Part I

点集拓扑

1 集合论与逻辑

1.1 集合论公理系统

1.1.1 罗素悖论

一些事物组成集合是不言自明的，但是任意地指定集合在某些时候会导致错误，如下面提到的罗素悖论.

Proposition 1.1.1.1 (罗素悖论). *不存在这样的一个集合*$U = \{x|x \notin x\}$.

证明. 若 $U \in U$，由定义$U \notin U$; 若$U \notin U$，由定义$U \notin U$.
从而这样这样的集合不是well-defined的. ∎

像上述集合U一样任意指定集合中的组成元素产生了问题.从而，将集合论公理化是必要的.

1.1.2 Z-F公理系统

下述公理系统避免了罗素悖论.

0. 存在空集$\varnothing \quad s.t. \forall$集合$B, B \notin \varnothing$.

1. (外延公理)
$$\left.\begin{array}{l} \forall x \in A \Rightarrow x \in B \\ \forall x \in B \Rightarrow x \in A \end{array}\right\} \implies A = B$$

2. (内涵公理) x是集合，$\varphi(x)$是公式，则$\exists$集合$Y = \{x \in x|\varphi(x)$成立$\}$.
(根据大集合构造小集合)

3. (无序对公理) $\forall x, y, \exists$集合$z = \{x, y\} \quad s.t. \forall t \in z, \quad t = x \quad \text{or} \quad t = y$.

4. (并集公理) X是集合, $\exists$集合$Y = \{y|\exists x \in X, s.t. y \in x\}$.
也就是说，对于以集合为元素的集合X，存在这样的集合Y，满足
$$Y = \bigcup_{\forall x \in X} x$$

5. (幂集公理)对于集合X，总存在集合Y，满足

$$Y = \{A|A \in Y\} \triangleq P(X)$$

$P(X)$称为X的幂集.

6. (无限公理)$\exists$集合X, 满足$\varnothing \in X, \forall x \in X, x \bigcup \{x\} \in X$.
这个集合被称为归纳集.

7. (替换公理)设集合A和公式$\varphi(x,y)$满足若$\forall x \in A, \exists!\, y,\ s.t.\, \varphi(x,y)$成立，则 $\exists$集合$B,\ s.t. \forall y \in B \Leftrightarrow \exists x \in A, \varphi(x,y)$成立.

8. (良基公理) X是集合，则$\exists y \in x,\ s.t.\, y \bigcap X = \varnothing$.

1.1.3 关于Z-F公理系统的讨论

Proposition 1.1.3.1 (避免罗素悖论)**.** *在Z-F公理系统中，不存在这样的一个集合$U = \{x|x \notin x\}$.*

证明. 考虑内涵公理：x是集合，$\varphi(x)$是公式，则$\exists$集合$Y = \{x \in x|\varphi(x)$成立$\}$将$x \notin x$作为公式，根据内涵公理构造集合，而$U = \{x \in x|x \notin x\}$ 不能是Z-F公理系统中的集合. ∎

Proposition 1.1.3.2. *不存在以所有集合为元素的集合，即大全集不存在.*

证明. 反证法.若存在这样的集合x，由内涵公理可以构造

$$U = \{x \in x|x \notin x\}$$

这个集合U恰好是罗素悖论中构造的集合. ∎

1.1.4 归纳集与自然数集

虽然不是点集拓扑的常规内容，但是这个部分相当有趣，提供了一个新奇的角度研究自然数集. 使用了归纳集定义了自然数集，在这个定义下，可以根据偏序关系（包含关系）巧妙地说明自然数集上的一些性质.

Definition 1.1.4.1 (自然数集)**.** *所有归纳集的交称为自然数集，记作$\mathbb{N}$.*
严格来说，任取归纳集X, 取定公式$\varphi(x) : x$属于所有归纳集，则

$$\mathbb{N} = \{x \in X|\varphi(x)\}$$

定义0为$\varnothing$，1为$\{\varnothing\}$, $x\bigcup\{x\}\triangleq x+1=\{0,1,2\ldots,x\}$. 在这个定义下的自然数集上有偏序关系 $a\prec b\Leftrightarrow a\subset b$.

Theorem 1.1.4.1 (第一数学归纳法). *P(x)*是一个关于自然数的命题，已知

$$\begin{cases} P(0)\text{成立} & (i) \\ P(n)\text{成立}\Rightarrow P(n+1)\text{成立} & (ii) \end{cases}$$

则 $\forall x\in\mathbb{N}$, $P(x)$成立.

证明. 首先取一个包括了所有能让命题$P(x)$成立的自然数x集合 $X=\{x\in\mathbb{N}|P(x)\text{成立}\}$，然后证明这个集合是一个归纳集：

$$X\text{满足}\begin{cases} \varnothing\in X, \quad \text{由 (i) 得到} \\ x\in X\Rightarrow x\bigcup\{x\}=x+1\in X, \quad \text{由(ii)得到} \end{cases}$$

因此集合X是归纳集. 由自然数集的定义：所有归纳集的交为自然数集. 得到 $\mathbb{N}\subseteq X$. 又由于集合X的存在性为内涵公理所保证，$X\subseteq\mathbb{N}$ 从而$X=\mathbb{N}$，即 $\forall x\in\mathbb{N}$, $P(x)$成立. ∎

Theorem 1.1.4.2 (最小数原理). 自然数集的子集若非空，则其有最小元. $\forall$集合$A\subseteq\mathbb{N}$, $A\neq\varnothing$，则

$$\exists m\in A,\ s.t.\forall a\in A, m\subseteq a$$

证明. 将此命题改写成关于自然数n的命题$P(n)$:

$$A\subseteq n,\ A\neq\varnothing\implies\exists m\in A,\ s.t.\forall a\in A, m\subseteq a$$

利用第一数学归纳法.
i) $n=\varnothing$的情形是平凡的.
ii) 下证：$P(k)$成立 $\implies$ $P(k+1)$成立
设$P(k)$成立，对于任意集合$A\subseteq k+1=\{0,1,\ldots,k\}$
若$\varnothing\neq B=A\bigcap\{0,1,\ldots,k-1\}$, 则由$P(k)$成立，$B$有最小元$b$，从而$b$也是$A$的最小元. 若$\varnothing=B=A\bigcap\{0,1,\ldots,k-1\}$, 则$A=\{k\}$，从而$k$是$A$的最小元.
由第一数学归纳法，$P(n)$对任意$n\in\mathbb{N}$都成立. ∎

结合第一数学归纳法和最小数原理可以证明第二数学归纳法.

Theorem 1.1.4.3 (第二数学归纳法)**.** *P(x)*是一个关于自然数的命题，已知

$$\begin{cases} P(0)\text{成立} & (i) \\ \forall k \leq n, P(k)\text{成立} \Rightarrow P(n+1)\text{成立} & (ii) \end{cases}$$

则 $\forall x \in \mathbb{N}$, $P(x)$成立.

证明. 考虑使命题$P(k)$不成立的自然数集$A = \{x \in \mathbb{N} | P(x)\text{不成立}\}$.
下证$A = \varnothing$.
使用反证法，若这个集合非空，由最小数原理，自然数集A有最小元m.
a)若$m = 0$，与(i)中$P(0)$成立矛盾.
b)若$m > 0$，则由于m是自然数集A的最小元有，$\forall k \leq m-1, P(k)$成立，由(ii)得$P(m)$也成立. 与$m \in A$矛盾!
综上，$A = \{x \in \mathbb{N} | P(x)\text{不成立}\} = \varnothing$，即$\forall x \in \mathbb{N}$, $P(x)$成立. ∎

1.1.5 自然数集上的运算

先前定义了$x \bigcup \{x\} \triangleq x+1$，这里的$x+1$只是一个记号. 可以使用映射定义一个加法. 然后说明它是well-defined且唯一的.

Proposition 1.1.5.1 (自然数集上的加法)**.** $\exists!$映射 $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

$$s.t. \quad \begin{cases} f(0) = m \\ f(x+1) = f(x) + 1 \end{cases} \text{, 从而} \forall k \in \mathbb{N}, f(k) \triangleq m + k.$$

证明. 改写为关于自然数的命题$P(x)$:

$\forall k \in \{0, 1, \ldots, x\}$对于每一个给定的$k$, 有且仅有如下映射$f_k : \{0, 1, \ldots, k\} \to \mathbb{N}$

$$s.t. \begin{cases} f_k(0) = m \\ f_k(x+1) = f_k(x) + 1 \quad \forall x+1 \in \{0, 1, \ldots, k\} \end{cases} (*)$$

i)$P(0)$ $\quad f_0 : 0 \mapsto m$.
ii)$P(k)$成立，即$\exists!$ $f_k : \{0, 1, \ldots, k\} \to \mathbb{N}$满足上述条件$(*)$，则改造$f_k$得到限制在$\{0, 1, \ldots, k+1\}$上的$f_{k+1}$.

$$f_{k+1}(x) = \begin{cases} f_k(x), & x \in \{0, 1, \ldots, k\} \\ f_k(k) + 1, & x = k+1 \end{cases}$$

容易验证，这样的f_{k+1}满足上述条件$(*)$.存在性得证.
下证这样的f_{k+1}是唯一的:

若存在另一个$\overline{f_{k+1}}:\{0,1,\dots,k+1\}\to\mathbb{N}$，将$\overline{f_{k+1}}$限制在$\{0,1,\dots,k\}$上，由$P(k)$成立得 $\overline{f_{k+1|\{0,1,\dots,k\}}}=f_{k+1|\{0,1,\dots,k\}}=f_k$
又$\because$ $\overline{f_{k+1}}(k+1)=\overline{f_k}(k)+1=f_k(k)+1=f_{k+1}(k+1)$
$\therefore$ $\overline{f_{k+1}}$和f_{k+1}在$\{0,1,\dots,k+1\}$上的对应关系一致
$\therefore$ $f_{k+1}=\overline{f_{k+1}}$，即这样的$f_{k+1}$是唯一的，从而命题$P(k+1)$成立.
由第一数学归纳法，$\forall x\in\mathbb{N},\exists!\quad f_x:\{0,1,\dots,x\}\to\mathbb{N}$

$$f=\bigcup_{k=1}^{+\infty}f_k:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$$

由于在相同的限制下，f_k总有相同的对应法则，所以在对映射f_k取并集后得到的f是well-defined的. 这个f就是原命题中的唯一存在的映射，唯一性和存在性都由$P(x)$对任意自然数x成立保证. ∎

加法结合律和加法交换律是显然的.根据自然数上加法可以定义乘法.

Proposition 1.1.5.2 (自然数集上的乘法)**.** 对任意给定的$m\in\mathbb{N}$，
$\exists!$映射 $g:\mathbb{N}\to\mathbb{N},\ s.t.\ \begin{cases}g(0)=0\\ g(x+1)=g(x)+m\end{cases}$，从而$\forall k\in\mathbb{N},g(k)\triangleq m\times k$.

证明. 类似prop.1.1.5.1，证明关于自然数的命题$P(x)$，然后构造唯一存在的f. $P(x):\exists!$ 映射$g:\mathbb{N}\to\mathbb{N},\ s.t.\ g(1)=m,g(k)=\underbrace{g(1)+\cdots+g(1)}_{\text{k个}}$ 设加法映射是$f(k)=m+k$，$g(k)=\underbrace{f\circ f\cdots\circ f}_{\text{k个}}(m)$ f是唯一存在的，从而g作为f的复合也是唯一存在的. ∎

Corollary 1.1.5.1.

$$\forall m,n\in\mathbb{N},m\times(n+1)=m\times n+m$$

证明. 取对给定的m，取乘法映射$g,s.t.\ g(0)=0,g(x+1)=g(x)+m$

$$\begin{aligned}m\times(n+1)=g(n+1)&=\underbrace{g(1)+\cdots+g(1)}_{\text{n+1个}}\\&=\underbrace{g(1)+\cdots+g(1)}_{\text{n个}}+g(1)\\&=g(n)+m\\&=m\times n+m\end{aligned}$$

∎

Corollary 1.1.5.2 (乘法分配律)**.**

$$\forall m, n, k \in \mathbb{N}, k \times (m + n) = k \times m + k \times n$$

证明. 利用Cor. 1.1.5.1归纳即可. ∎

Corollary 1.1.5.3 (乘法交换律)**.**

$$\forall m, n \in \mathbb{N}, \quad m \times n = n \times m$$

证明. 构造命题$P(x) : \forall n \in \mathbb{N}, x \times m = m \times x$.
i)$P(0)$成立.
ii)$P(k)$成立时，由Cor. 1.1.5.1得$P(k + 1)$成立. 所以$P(x)$对任意$x \in \mathbb{N}$成立，即

$$\forall m, n \in \mathbb{N}, \quad m \times n = n \times m$$

∎